

Московский государственный университет леса
Кафедра систем автоматического управления

Расчетно-графическая работа №5
по дисциплине
“Теория управления”
на тему
"Синтез оптимальной по быстродействию системы
с помощью принципа максимума Понтрягина"

Выполнил студент группы ПМ-52 Таченов С. А.

Проверил преподаватель Земляной Г. Ф.

Постановка задачи

I. Для устойчивого объекта первого порядка

$$\dot{x} + ax = bu \quad (1) \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbf{C}_1[0; \infty) \quad (2) \quad x(T) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min \quad (5)$$

$$|u| \leq 14$$

II. Для устойчивого по \dot{x} объекта второго порядка

$$T \ddot{x} + \dot{x} = k u \quad (1) \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbf{C}_1[0; \infty) \quad (2) \quad \dot{x}(T) = x(T) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min \quad (5)$$

$$|u| \leq 14$$

Вариант №214:

Вариант №	a	b	T	k
214	1.8	0.9	0.5	0.4

Требуется с помощью принципа максимума найти:

1. Оптимальный регулятор $u^* = u^*(x)$ (оптимальный закон управления).
2. Структурную схему оптимальной системы.

Решение для объекта первого порядка

1. Математическая постановка задачи

$$\dot{x} = -1.8x + 0.9u = f_0(x, u) \quad (1) \qquad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbf{C}_1[0; \infty) \quad (2) \qquad x(T) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min \quad (5)$$

$$|u| \leq 14$$

2. Введем сопряженную функцию

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial f}{\partial x} \psi = 1.8\psi$$

3. Решаем уравнение для сопряженной функции

$$\psi = Ce^{1.8t}$$

4. Составляем укороченную функцию Понтрягина

$$H = f\psi = Ce^{1.8t}(-1.8x + 0.9u)$$

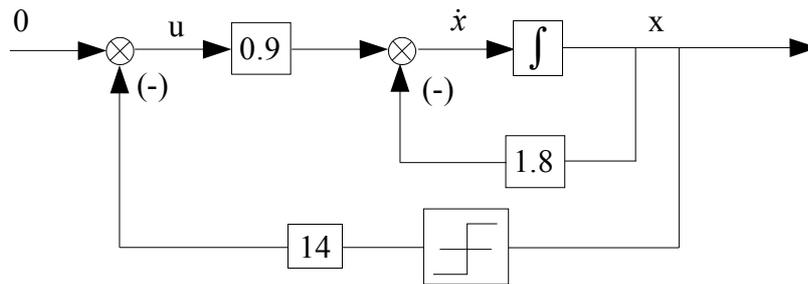
5. Максимизируем укороченную функцию Понтрягина по управлению

$$u^* = 14 \operatorname{sign} C$$

или, учитывая начальное условие (3),

$$u^* = -14 \operatorname{sign} x_0$$

Построим теперь структурную схему оптимальной системы, воспользовавшись уравнением объекта и построенным оптимальным регулятором



Решение для объекта второго порядка

1. Математическая постановка задачи.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 & & x_1(0) = x_{10} = x_0, x_2(0) = x_{20} = \dot{x}_0 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + \frac{4}{5}u = f_2 & & x_1(T) = x_2(T) = 0 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^T dt \rightarrow \min$$

$$|u| \leq 14$$

2. Вводим сопряженные функции.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 = 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 = -\psi_1 + 2\psi_2 \end{aligned}$$

3. Решаем уравнения для сопряженных функций.

$$\psi_1 = C_1, \psi_2 - 2\psi_2 = -C_1, \psi_2 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 e^{2t}$$

4. Составляем укороченную функцию Понтрягина.

$$H = f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2 = x_2 \psi_1 + (-2x_2 + \frac{4}{5}u) \psi_2$$

5. Максимизируем укороченную функцию Понтрягина по допустимым управлениям.

$$u^* = 14 \operatorname{sign} \psi_2$$

учитывая выражение для ψ_2 получаем, что управление должно быть максимальным по модулю и может иметь максимум одно переключение знака.

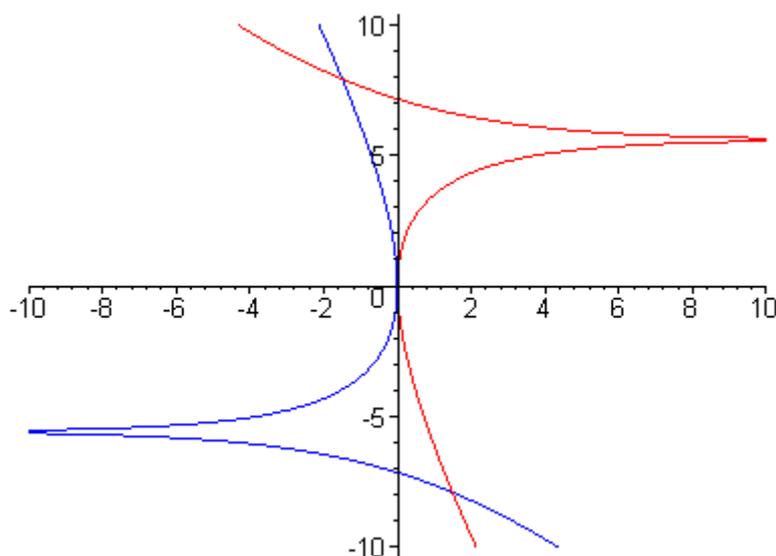
6. Составляем фазовый портрет системы.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-2x_2 + \frac{4}{5}u} = \frac{x_2}{-2x_2 \pm \frac{4}{5}14}, \quad dx_1 = \frac{x_2 dx_2}{-2x_2 \pm \frac{4}{5}14},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \mp \frac{14}{5} \ln \left| x_2 \mp \frac{28}{5} \right| + c,$$

где управлению $u=14$ соответствует кривая со знаками "-" в формуле, а управлению $u=-14$ - кривая со знаками "+".

При $c = \pm \frac{14}{5} \ln \frac{28}{5}$ эти кривые проходят через начало координат. Изобразим их графики.

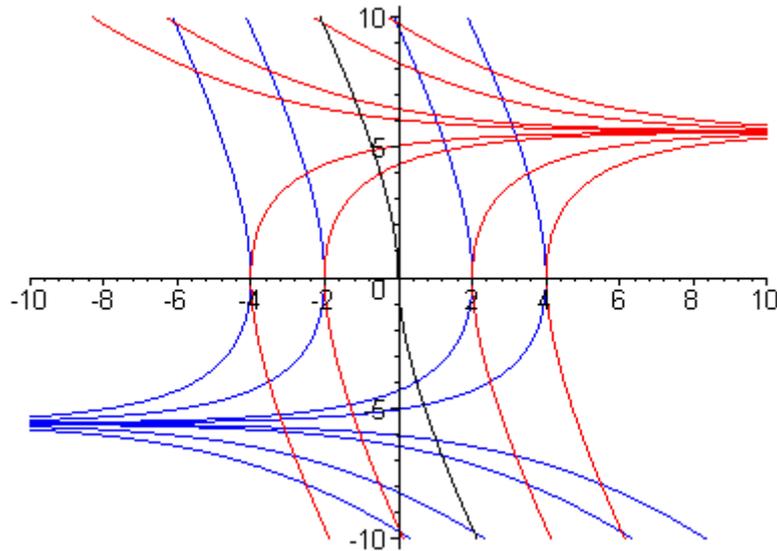


Здесь красным цветом показана кривая для управления $u=14$ и синим - для управления

$u = -14$. Объединим части этих двух кривых, ведущие в начало координат, в единую кривую. Эта кривая будет кривой переключения управления и аналитическое выражение для нее запишется следующим образом.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \text{sign } x_2 \frac{14}{5} \left(\ln \left| \frac{28}{5} + |x_2| \right| - \ln \left| \frac{28}{5} \right| \right) = 0$$

Окончательно фазовый портрет системы с линией переключения управления выглядит следующим образом.



Здесь черным цветом показана линия переключения управления, а красным и синим - кривые, соответствующие положительным и отрицательным управлениям при различных значениях константы c .

7. Из уравнения кривой переключения управления с учетом ограниченности управления получаем оптимальный регулятор.

$$u^* = -14 \text{sign} \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \text{sign } x_2 \frac{14}{5} \left(\ln \left| \frac{28}{5} + |x_2| \right| - \ln \left| \frac{28}{5} \right| \right) \right) = -14 \text{sign}(x_1 + \varphi(x_2)),$$

где $\varphi(x_2) = \frac{1}{2}x_2 - \text{sign } x_2 \frac{14}{5} \left(\ln \left| \frac{28}{5} + |x_2| \right| - \ln \left| \frac{28}{5} \right| \right)$

8. Строим структурную схему оптимальной системы

