

Московский государственный университет леса
Кафедра систем автоматического управления

Расчетно-графическая работа №4
по дисциплине
“Теория управления”
на тему
“Синтез оптимального регулятора с помощью
уравнения принципа максимума”
(для объекта второго порядка)

Выполнил студент группы ПМ-52 Таченов С. А.

Проверил преподаватель Земляной Г. Ф.

Москва, 2003

Постановка задачи

Решить для устойчивого по \dot{x} объекта управления решить следующую линейно-квадратичную оптимизационную задачу:

$$T \ddot{x} + \dot{x} = k u \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbb{C}_2[0; \infty) \quad (2)$$

$$\dot{x}(\infty) = x(\infty) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\alpha^2 x^2 + u^2) dt \rightarrow \min \quad (5)$$

Вариант №214:

α	T	k
7.5	0.5	0.4

Требуется с помощью принципа максимума найти:

1. Вид оптимального процесса $x^* = x^*(t)$.
2. Вид оптимального программного управления $u^* = u^*(t)$.
3. Оптимальный регулятор $u^* = u^*(x, \dot{x})$ (оптимальный закон управления).
4. Структурную схему оптимальной системы.

Решение

1. Математическая постановка задачи.

$$0.5 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 0.4 u$$

$$x_1(0) = x_{10}, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$$

$$x_1(t) \in \mathbf{C}_2[0; \infty)$$

$$\dot{x}_1(\infty) = x_1(\infty) = 0$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (56.25 x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

Преобразуем ее к системе первого порядка с двумя параметрами.

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$x_2(0) = x_{20} = \dot{x}_{10}$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = -2x_2 + 0.8u = f_2(x_1, x_2, u)$$

$$x_2(\infty) = 0$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (56.25 x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

2. Вводим дополнительную фазовую координату.

$$x_0 = \int_0^t \frac{1}{2} (56.25 x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min, \quad x_0(0) = 0, x_0(\infty) = I \rightarrow \min$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2} (56.25 x_1^2 + u^2) = f_0(x_1, x_2, u)$$

3. Вводим сопряженные переменные.

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_0} \psi_2 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 = -56.25 x_1 \psi_0,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_2} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 = -\psi_1 + 2\psi_2$$

4. Частично решаем полученную систему уравнений.

$$\psi_0 = c_0 = -1$$

5. Составляем функцию Понтрягина.

$$H = f_0 \psi_0 + f_1 \psi_1 + f_2 \psi_2 = -\frac{1}{2} (56.25 x_1^2 + u^2) + x_2 \psi_1 + (-2x_2 + 0.8u) \psi_2$$

6. Максимизируем функцию Понтрягина по управлению.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + 0.8\psi_2 = 0, u^* = 0.8\psi_2$$

7. Подставляем оптимальное управление в уравнение объекта и решаем совместно с системой сопряженных уравнений.

$$0.5 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 0.32 \psi_2, \dot{\psi}_1 = 56.25 x_1, \frac{d}{dt} = p, 0.5 p^2 x_1 + p x_1 = 0.32 \psi_2, p \psi_1 = 56.25 x_1, p \psi_2 = -\psi_1 + 2\psi_2,$$

$$\psi_1 = 2\psi_2 - p\psi_2, 2p\psi_2 - p^2\psi_2 = 56.25 x_1, \psi_2 = \frac{56.25 x_1}{2p - p^2}, 0.5 p^2 x_1 + p x_1 = \frac{18 x_1}{2p - p^2},$$

$$-0.5 p^4 x_1 + p^3 x_1 - p^3 x_1 + 2 p^2 x_1 = 18 x_1,$$

$$x_1^{(4)} - 4 \ddot{x}_1 + 36 x_1 = 0,$$

$$\mu^4 - 4\mu^2 + 36 = 0, \mu = \pm \sqrt{2 \pm 4i\sqrt{2}} = \pm 2 \pm i\sqrt{2}$$

Учитывая граничные условия на бесконечности, получаем оптимальный процесс

$$x_1^* = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} = C_1 e^{-2+i\sqrt{2}t} + C_2 e^{-2-i\sqrt{2}t},$$

$$\mu_1 = -2 + i\sqrt{2} \approx -2 + 1.41i, \quad \mu_2 = -2 - i\sqrt{2} \approx -2 - 1.41i$$

А также оптимальное программное управление и оптимальный регулятор

$$u^* = (1.25 \mu_1^2 + 2.5 \mu_1) C_1 e^{\mu_1 t} + (1.25 \mu_2^2 + 2.5 \mu_2) C_2 e^{\mu_2 t} = (-2.5 - 2.5i\sqrt{2}) C_1 e^{\mu_1 t} + (-2.5 + 2.5i\sqrt{2}) C_2 e^{\mu_2 t}$$

$$u^*(x_1, x_2) = 1.25(-\mu_1 \mu_2 x_1 + (\mu_1 + \mu_2) x_2) + 2.5 x_2 = -1.25 \mu_1 \mu_2 x_1 + (1.25(\mu_1 + \mu_2) + 2.5) x_2 = -7.5 x_1 - 2.5 x_2$$

8. Строим структурную схему оптимальной системы

