

Московский государственный университет леса
Кафедра систем автоматического управления

Расчетно-графическая работа №3
по дисциплине
“теория управления”
на тему
“синтез оптимального регулятора с помощью
принципа максимума”
(для объекта первого порядка)

Выполнил студент группы ПМ-52 Таченов С. А.
Проверил преподаватель Земляной Г. Ф.

Постановка задачи

Для устойчивого объекта решить задачу об оптимальном управлении.

$$\dot{x} = -ax + bu \quad (1) \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbb{C}_1[0; \infty] \quad (2)$$

$$x(\infty) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\gamma^2 x^2 + u^2) dt \rightarrow \min \quad (5)$$

Вариант №	a	b	γ^2
214	1.8	0.9	12

Требуется с помощью принципа максимума найти:

1. Оптимальный процесс $x^* = x^*(t)$.
2. Оптимальное программное управление $u^* = u^*(t)$.
3. Оптимальный регулятор $u^* = u^*(x)$ (оптимальный закон управления).
4. Структурную схему оптимальной системы.

Решение

1. Математическая постановка задачи.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, u) = -1.8x_1 + 0.9u$$

$$x_1(0) = x_{10}$$

$$x_1(t) \in \mathbb{C}_1[0; \infty)$$

$$x_1(\infty) = 0$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (12x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min$$

2. Введем новую фазовую переменную.

$$x_0(t) = \int_0^t \frac{1}{2} (12x_1^2 + u^2) dt, \quad \dot{x}_0 = f_0(x, u) = \frac{1}{2} (12x_1^2 + u^2), \quad x_0(0) = 0, x_0(\infty) = I \rightarrow \min$$

3. Вводим сопряженные функции.

$$\psi_0 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \psi_1 = 0, \quad \psi_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 = -12x_1 \psi_0 + 1.8 \psi_1$$

4. Частично решаем систему уравнений для сопряженных функций.

$$\psi_0 = c_0 = -1$$

5. Составляем функцию Понtryгина.

$$H = f_0 \psi_0 + f_1 \psi_1 = -\frac{1}{2} (12x_1^2 + u^2) + (-1.8x_1 + 0.9u) \psi_1$$

6. Максимизируем функцию Понtryгина по управлению.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + 0.9 \psi_1 = 0, \quad u^* = 0.9 \psi_1$$

7. Подставляем оптимальное управление в уравнение объекта.

$$\dot{x}_1 = -1.8x_1 + 0.81\psi_1$$

И решаем полученное уравнение совместно с системой сопряженных уравнений.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 12x_1 + 1.8\psi_1, \quad \frac{d}{dt} = p, \quad p\psi_1 = 12x_1 + 1.8\psi_1, \quad \psi_1 = \frac{12x_1}{p-1.8}, \\ px_1 &= -1.8x_1 + 0.81 \frac{12x_1}{p-1.8}, \quad p^2x_1 - 1.8px_1 = -1.8px_1 + 3.24x_1 + 9.72x_1, \\ \ddot{x}_1 &- 12.96x_1 = 0 \end{aligned}$$

8. Как было показано в РГР-1, окончательное решение будет иметь вид

$$x_1^* = x_{10} e^{-3.6t}$$

$$u^* = -2x_{10} e^{-3.6t}$$

$$u^* = -2x_1$$

9. И структурная схема объекта будет выглядеть следующим образом:

