

Московский государственный университет леса
Кафедра систем автоматического управления

Домашняя контрольная работа №3
по дисциплине
“теория управления”
на тему
"синтез оптимального регулятора с помощью
принципа максимума"
(для объекта первого порядка)

Выполнил студент группы ПМ-52 Таченов С. А.

Проверил преподаватель Земляной Г. Ф.

Постановка задачи

Для неустойчивого объекта решить задачу об оптимальном управлении.

$$\dot{x} = ax + bu \quad (1) \quad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbf{C}_1[0; \infty) \quad (2) \quad x(\infty) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (\gamma^2 x^2 + u^2) dt \rightarrow \min \quad (5)$$

| Вариант № | a | b | γ^2 |
|-----------|-----|-----|------------|
| 214 | 1.8 | 0.9 | 12 |

Требуется с помощью принципа максимума найти:

1. Оптимальный процесс $x^* = x^*(t)$.
2. Оптимальное программное управление $u^* = u^*(t)$.
3. Оптимальный регулятор $u^* = u^*(x)$ (оптимальный закон управления).
4. Структурную схему оптимальной системы.

Решение

1. Математическая постановка задачи.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) = 1.8x_1 + 0.9u & x_1(0) &= x_{10} \\ x_1(t) &\in \mathbf{C}_1[0; \infty) & x_1(\infty) &= 0 \\ I &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(12x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min \end{aligned}$$

2. Введем новую фазовую переменную.

$$x_0(t) = \int_0^t \frac{1}{2}(12x_1^2 + u^2) dt, \quad \dot{x}_0 = f_0(x, u) = \frac{1}{2}(12x_1^2 + u^2), \quad x_0(0) = 0, x_0(\infty) = I \rightarrow \min$$

3. Вводим сопряженные функции.

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_0} \psi_1 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1} \psi_0 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 = -12x_1\psi_0 - 1.8\psi_1$$

4. Частично решаем систему уравнений для сопряженных функций.

$$\psi_0 = c_0 = -1$$

5. Составляем функцию Понтрягина.

$$H = f_0\psi_0 + f_1\psi_1 = -\frac{1}{2}(12x_1^2 + u^2) + (1.8x_1 + 0.9u)\psi_1$$

6. Максимизируем функцию Понтрягина по управлению.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + 0.9\psi_1 = 0, \quad u^* = 0.9\psi_1$$

7. Подставляем оптимальное управление в уравнение объекта.

$$\dot{x}_1 = 1.8x_1 + 0.81\psi_1$$

И решаем полученное уравнение совместно с системой сопряженных уравнений.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 12x_1 - 1.8\psi_1, \quad \frac{d}{dt} = p, \quad p\psi_1 = 12x_1 - 1.8\psi_1, \quad \psi_1 = \frac{12x_1}{p+1.8}, \\ px_1 &= 1.8x_1 + 0.81 \frac{12x_1}{p+1.8}, \quad p^2x_1 + 1.8px_1 = 1.8px_1 + 3.24x_1 + 9.72x_1, \\ \ddot{x}_1 - 12.96x_1 &= 0 \end{aligned}$$

8. Как было показано в ДКР-1, окончательное решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_{10} e^{-3.6t} \\ u^* &= -6x_{10} e^{-3.6t} \\ u^* &= -6x_1 \end{aligned}$$

9. И структурная схема объекта будет выглядеть следующим образом:

