

Московский государственный университет леса  
Кафедра систем автоматического управления

**Домашняя контрольная работа №1  
по дисциплине  
“теория автоматического управления”**

Выполнил студент группы ПМ-52 Таченов С. А.  
Проверил преподаватель Земляной Г. Ф.

## Постановка задачи

Для устойчивого объекта решить задачу об оптимальном управлении.

$$\dot{x} = 1.8x + 0.9u \quad (1) \qquad x(0) = x_0 \quad (3)$$

$$x(t) \in \mathbb{C}_1 [0; \infty) \quad (2) \qquad x(\infty) = 0 \quad (4)$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (12x^2 + u^2) dt \rightarrow \min \quad (5)$$

Требуется с помощью уравнения Эйлера найти:

1. Оптимальный процесс  $x^* = x^*(t)$ .
2. Оптимальное программное управление  $u^* = u^*(t)$ .
3. Оптимальный регулятор  $u^* = u^*(x)$  (оптимальный закон управления).
4. Структурную схему оптимальной системы.

## Решение

Выразим  $u$  из уравнения связи и подставим в выражение для функционала, чтобы привести задачу к каноническому виду:

$$u = \frac{1}{0.9}(x - 1.8x) , \quad I = \int_0^{\infty} 12x^2 + \frac{1}{0.81}(x^2 - 3.6x)x + 3.24x^2 dt = \int_0^{\infty} 16x^2 + \frac{1}{0.81}x^2 - \frac{40}{9}xx dt$$

Вычислим частные производные подынтегральной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 32x - \frac{40}{9}x , \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2}{0.81}x - \frac{40}{9}x$$

Запишем уравнение Эйлера для полученной вариационной задачи:

$$32x - \frac{40}{9}x - \frac{2}{0.81}x + \frac{40}{9}x = 0 , \quad x - 12.96x = 0$$

Решая уравнение Эйлера, получим

$$x = Ae^{-3.6t} + Be^{3.6t}$$

Из граничных условий очевидно, что окончательное решение будет иметь вид

$$x^* = x_0 e^{-3.6t}$$

Полученное выражение является выражением для оптимального процесса. Найдем теперь оптимальное программное управление, воспользовавшись уравнением связи

$$u^* = \frac{10}{9}(x^* - 1.8x^*) = \frac{-10}{9}3.6x_0 e^{-\mu t} - 2x_0 e^{-\mu t} = -6x_0 e^{-\mu t}$$

Теперь найдем оптимальный регулятор, исключив из выражений для оптимального процесса и программного управления время  $t$

$$u^* = -6x$$

Построим теперь структурную схему оптимальной системы, воспользовавшись уравнением связи и построенным оптимальным регулятором

